

# ANALYSIS

## Gebrochen rationale Funktionen

---

### Aufgabensammlung Teil 1: **Funktionen ohne Parameter**

**Einfache Funktionsuntersuchungen ohne Zähleraufgaben  
und Abituraufgaben**

Neu zusammengestellte Aufgabensammlung.

Datei Nr. 43101

Stand: 6. März 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

[www.mathe-cd.de](http://www.mathe-cd.de)

## Inhalt: Zuerst die Funktionenliste

### Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

#### (a) Nenner ohne Summe

7

##### Aufgabe 101

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

##### Aufgabe 102

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2}$$

##### Aufgabe 103

$$f(x) = \frac{2-2x}{x^2}$$

##### Aufgabe 104

$$f(x) = 16 \frac{x^2-4}{x^3}$$

#### (b) Nenner mit Summe, mit Polstellen

3

##### Aufgabe 111

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

##### Aufgabe 112

$$f(x) = \frac{12}{x^2-4}$$

##### Aufgabe 121

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

##### Aufgabe 122

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$

##### Aufgabe 123

$$f(x) = \frac{5}{x^2-9}$$

##### Aufgabe 124

$$f(x) = \frac{2}{x^2-2x}$$

##### Aufgabe 131

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$$

##### Aufgabe 132

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$$

##### Aufgabe 133

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^2}$$

##### Aufgabe 134

$$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$$

##### Aufgabe 141

$$f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2} \quad + \text{Zusatz}$$

## Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner

### (c) Nenner mit einer Summe – ohne Polstellen!

10

#### Aufgabe 151

$$f(x) = \frac{48}{x^2 + 16}$$

#### Aufgabe 152

$$f(x) = \frac{16x}{x^2 + 8}$$

#### Aufgabe 161

$$f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$$

mit Zusatz

#### Aufgabe 162

$$f(x) = \frac{16x}{x^2 + 4}$$

mit Zusatz

#### Aufgabe 163

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

mit Zusatz

#### Aufgabe 164

$$f(x) = \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 5}$$

mit Zusatz

#### Aufgabe 170

$$f(x) = \frac{2x + 5}{(x - 5)^2}$$

mit Zusatz

## Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler > Grad Nenner

### (a) Nenner ohne Summe

12

#### Aufgabe 201

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$$

#### Aufgabe 202

$$f(y) = \frac{y^2 - 27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$$

#### Aufgabe 203

$$f(x) = 3 \frac{x^2 - x + 6}{x^2} = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$$

### (b) Nenner mit einer Summe, mit Polstellen

13

#### Aufgabe 211

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$$

#### Aufgabe 212

$$f(x) = \frac{4x + 2}{2 - x}$$

#### Aufgabe 213

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x + 1}$$

#### Aufgabe 221

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

**Aufgabe 222**

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x}$$

**Aufgabe 223**

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

**Aufgabe 231**

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

**Aufgabe 232**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$$

**Aufgabe 233**

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^3 + x^2 - 2x}$$

**Typ 2 Funktionen mit Grad Nenner = Grad Nenner****(c) Nenner mit einer Summe, ohne Polstellen**

15

**Aufgabe 241**

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$$

**Aufgabe 242**

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

**Aufgabe 251**

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4}$$

mit Zusatz

**Aufgabe 252**

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 4}$$

mit Zusatz

**Aufgabe 253**

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$$

mit Zusatz

**Aufgabe 260**

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x^2 + 2x + 5}$$

mit Symmetrienachweis

### Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

#### (a) Nenner ohne Summe

17

##### Aufgabe 301

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

##### Aufgabe 302

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$$

##### Aufgabe 303

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 12}{x^2} = x - 1 + \frac{12}{x^2}$$

##### Aufgabe 311

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$$

mit Z'

##### Aufgabe 312

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2}$$

mit Zusatz

##### Aufgabe 313

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2}$$

mit Z'

##### Aufgabe 314

$$f(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 16}{2x^2}$$

mit Zusatz

### Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

#### (b) Nenner mit Summe

19

##### Aufgabe 321

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$$

##### Aufgabe 322

$$f(x) = -\frac{x^2 - 5}{x - 9}$$

##### Aufgabe 331

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{(x + 1)^2}$$

##### Aufgabe 335

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{x^2 + 4}$$

##### Aufgabe 341

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2} \quad \text{mit Zusatz}$$

##### Aufgabe 342

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x - 1)^2} \quad \text{mit Zusatz}$$

##### Aufgabe 343

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \quad \text{mit Zusatz (CAS)}$$

**Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2****(a) Nenner ohne Summe**

22

**Aufgabe 411**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$$

**Aufgabe 412**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2}{2x}$$

**Aufgabe 421**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$$

**Aufgabe 422**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$$

**(b) Nenner mit Summe**

23

**Aufgabe 431**

$$f(x) = \frac{x^3}{8x + 16} = \frac{x^3}{8x} = \frac{x^2}{8}$$

**Aufgabe 432**

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{2(x^2 + 8)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 + 8}$$

**Aufgabe 441**

$$f(x) = \frac{3x^2}{3(x^2 - 1)} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

zusatz

**Typ 5 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 3**

24

**Aufgabe 511**

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 36}{x}$$

**Aufgabe 512**

$$f(x) = \frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^2 + 16}$$

**Aufgabe 513**

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot \frac{x^5 + 13x^3 + 36x}{x^2 - 16}$$

**Typ 6 Betragsfunktionen**

27

**Aufgabe 611**

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - 3 \frac{|x|}{x^2 - 4} \quad \text{mit Zusatz}$$

**Typ 7 Zusammengesetzte Funktionen**

---

Noch leer

**Typ 8 Anwendungsaufgaben**

siehe Datei 43200!

## Aufgaben für diese Trainingsdatei

### Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner (a) Nenner ohne Summe

**Einfache Funktionsuntersuchungen ohne Zusatzaufgaben:**

**Aufgabe 101**

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 102**

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 103**

$$f(x) = \frac{2-2x}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 104**

$$f(x) = 16 \frac{x^2 - 4}{x^3}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

## Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner (b) Nenner mit Summe, mit Polstellen

**Aufgabe 111**

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 112**

$$f(x) = \frac{12}{3-x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 121**

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 122**

$$f(x) = \frac{2x}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 123**

$$f(x) = \frac{x}{x-9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 124**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 131**

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 132**

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 133**

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 134**

$$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 141**

(Abitur 1994 Baden-Württemberg)

Gegeben ist die Funktion  $f$  durch  $f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2}$ , ihr Schaubild sei  $K$ .

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.

Untersuche  $K$  auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch- und Tiefelpunkte,

Wendepunkte sowie Asymptoten.

Zeichne  $K$  im Bereich  $-2 \leq x \leq 1$ . Asymptoten r. Länge, Breite 2 cm.

- b)  $K$  schneidet die y-Achse in  $P$ .

Eine Gerade durch  $P$  schneidet  $K$  in  $B(x_B)$  mit  $y_B < -\frac{1}{2}$ .

Berechne die Koordinaten von  $B$ .

Bestimme die Punkte der Geraden  $x = -\frac{1}{2}$ , von denen aus die Strecke  $BP$  unter einem rechten Winkel erscheint.

- c) Die 's' Tangente an  $K$  in  $P$  (aus a) (siehe b)) schneidet die x-Achse in  $Q$ .

Berechne die Koordinaten von  $Q$ .

Die Tangente, das Schaubild  $K$ , die positive x-Achse und die Gerade  $x = z$

mit  $z > \frac{1}{4}$  begrenzen eine Fläche. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper. Bestimme das Volumen  $V(z)$ .

Existiert für  $z \rightarrow \infty$  ein Grenzwert  $V^*$  dieses Volumens? Wenn ja, berechne dieses.

## Typ 1 Funktionen mit Grad Zähler < Grad Nenner (c) Nenner mit einer Summe – ohne Polstellen!

### Aufgabe 151

$$f(x) = \frac{48}{x^2 + 16}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

### Aufgabe 152

$$f(x) = \frac{16x}{x^2 + 8}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

### Aufgabe 161

$$f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$$

- a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.
- b)  $P(u \mid f(u))$  sei für  $u > 0$  ein beliebiger Kurvenpunkt von  $K_1$ . Q sei das Spiegelbild zu P bzgl. der y-Achse: Berechne den Inhalt  $A(u)$  des Dreiecks OPQ. Für welchen Wert von u nimmt dieser Inhalt einen extremen Wert an. Bestimme diese Art sowie Größe.
- c) Dreht man das Dreieck OPQ um die x-Achse entsprechend um, so entsteht ein Kegel. Untersuche das Verhalten der Volumenfunktion  $V(u)$  dieses Kegels für  $u > 0$ .

Für welche Menge von u hat dieser Kegel ein halbes Grenzwertvolumen (für  $u \rightarrow \infty$ )?

### Aufgabe 162

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

- a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.
- b)  $P(u \mid f(u))$  sei für  $u > 0$  ein beliebiger Kurvenpunkt von  $K_2$ . Fällt man von P das Lot auf die x-Achse, so entsteht dort der Lotfußpunkt Q. Berechne den Inhalt  $A(u)$  des Dreiecks OPQ. Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion in ihrem Definitionsbereich.
- c) Dreht man das Dreieck OPQ um die y-Achse entsteht ein Körper, der wie ein Zylinder mit einem herausgebohrten Kegel aussieht. Untersuche das Verhalten der Volumenfunktion  $V(u)$  dieses Kegels für  $u > 0$ .

**Aufgabe 163**

Gegeben ist die Funktion  $f$  durch  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ , ihr Schaubild sei  $K$ .

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich.

Untersuche  $K$  auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der  $x$ -Achse, auf Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte sowie Asymptoten.

Zeichne  $K$  im Bereich  $-3 \leq x \leq 3$  samt Asymptoten mit Längeneinheit 2 cm.

- b)  $P(u | f(u))$  sei ein Punkt auf dem Graphen von  $f$  für  $u > 0$ . Die Parallele zur  $y$ -Achse durch  $P$  schneidet die  $x$ -Achse in  $Q$ .

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks  $OPQ$ . Besitzt dieser für eine bestimmte Lage von  $P$  einen extremen Inhalt?

Zeichne das Schaubild der zu  $OPQ$  gehörenden Dreiecksfläche. Berechne den Flächeninhalt der Funktion für  $0 \leq u \leq 3$  mit Längeneinheit 3 cm.

- c) Im 1. Feld wird ein Dreieck  $ABCD$  so eingezeichnet, dass  $C$  und  $D$  auf  $K$  liegen,  $A$  und  $B$  auf der  $x$ -Achse. Durch Drehung dieses Rechtecks um die  $x$ -Achse entsteht ein Zylinder.

Berechne das Volumen dieses Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  des Rechtecks.

Für welche Lage von  $C$  und  $D$  erhält dieses Zylinder Volumen ein Maximum?

- d) Berechne diejenigen Stammfunktionen zu  $f$ , deren Graphen durch den Punkt  $S(1 | 1)$  geht.

Ist die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x > 1 \\ F & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

überstetig und differenzierbar?

**Aufgabe 164**

$$f(x) = \frac{4x - 8}{x^2 - 4x + 5}.$$

- a) Untersuche das Schaubild  $K$  von  $f$  auf Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse, Asymptoten, Extrema und Wendepunkte. Zeichne das Schaubild.
- b) Zeige, dass  $K$  punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.
- c) Verschiebe die Kurve so, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt.
- d) Das Schaubild und Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

**Aufgabe 170**

$$f(x) = \frac{2x + 5}{(x^2 + 4x - 5)^2}$$

Kurvendiskussion mit Schaubild.

## Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner

### (a) Nenner ohne Summe

**Aufgabe 201**

$$f(x) = \frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 202**

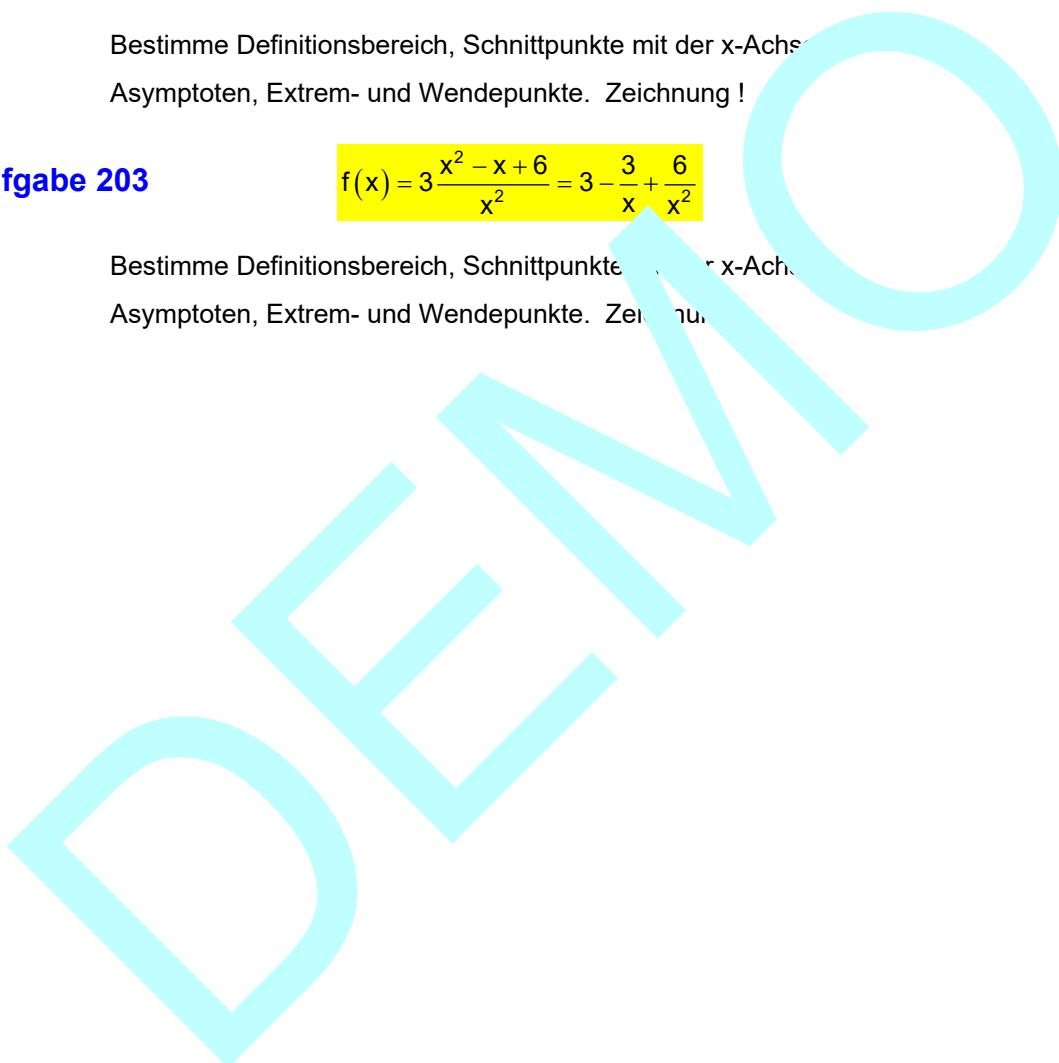
$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 203**

$$f(x) = 3 \frac{x^2 - x + 6}{x^2} = 3 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !



## Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner

### (b) Nenner mit einer Summe, mit Polstellen

**Aufgabe 211**

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 212**

$$f(x) = \frac{4x+2}{2-x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 213**

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 221**

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 222**

$$f(x) = -\frac{x^2}{-4x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 223**

$$f(x) = \frac{x-6}{x^2-4}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 231**

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 232**

$$f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 233**

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

DEFINITIONSBEREICH

## Typ 2 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner

### (c) Nenner mit einer Summe, ohne Polstellen

**Aufgabe 241**

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 242**

$$f(x) = \frac{16 - 4x^2}{x^2 + 16}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 251**

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4}$$

Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

Zusatzaufgabe:

Es sei  $P(u \mid f(u))$  für  $u > 0$  ein Punkt des Schaubildes von K. Das Lot von P auf die Gerade  $y = 1$  schneidet diese in Q. R sei der Punkt  $R(0 \mid 1)$ . Berechne den Inhalt  $A(u)$  des Dreiecks PQR. Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion  $A(u)$ .

**Aufgabe 252**

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 4}$$

Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen: Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.

Zusatzaufgaben

- (1) Zeige, dass  $K_5$  punktsymmetrisch zu  $Z(2 \mid 1)$  ist.
- (2) Es sei  $P(u \mid f(u))$  für  $u > 0$  ein Punkt des Schaubildes von K.

Das Lot von P auf die Gerade  $y = 1$  schneidet diese in Q. R sei der Punkt  $R(0 \mid 1)$ .

Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.

Untersuche das Verhalten der Flächeninhaltsfunktion  $A(u)$ .

**Aufgabe 253**

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$$

- a) Fertige eine komplette Kurvendiskussion an für die Schaubilder der folgenden Funktionen:  
Berechne also die Schnittpunkte mit der x-Achse, Polstellen, Symmetrieverhalten, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Fertige eine Zeichnung an.
- b)  $P(u | f(u))$  sei für  $u > 0$  ein Punkt des Schaubildes von  $K_3$ . Das Lot von P auf die waagrechte Asymptote schneidet diese in Q. Spiegelt man P und Q an der y-Achse, erhält man R und S. Berechne den Inhalt  $A(u)$  des Vierecks PQRS. Für welches  $u$  wird dieser Inhalt maximal?
- c) Dreht man das Rechteck um die y-Achse, entsteht ein Zylinder.  
Untersuche das Verhalten der Zylinder-Volumenfunktion  $V(u)$
- d) Dreht man das Rechteck um die x-Achse, entsteht ein Ring.  
Berechne dessen Volumen in Abhängigkeit von  $u$ .

**Aufgabe 260**

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x^2 + 2x + 5}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

Zeige durch Rechnung, dass das Schaubild symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse ist.  
Welche Gleichung hat die Funktionskurve, die erhalten wird, wenn man das Schaubild so in x-Richtung verschiebt, dass die y-Achse zur Symmetrieachse wird?

### Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

#### (a) Nenner ohne Summe

**Aufgabe 301**

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 302**

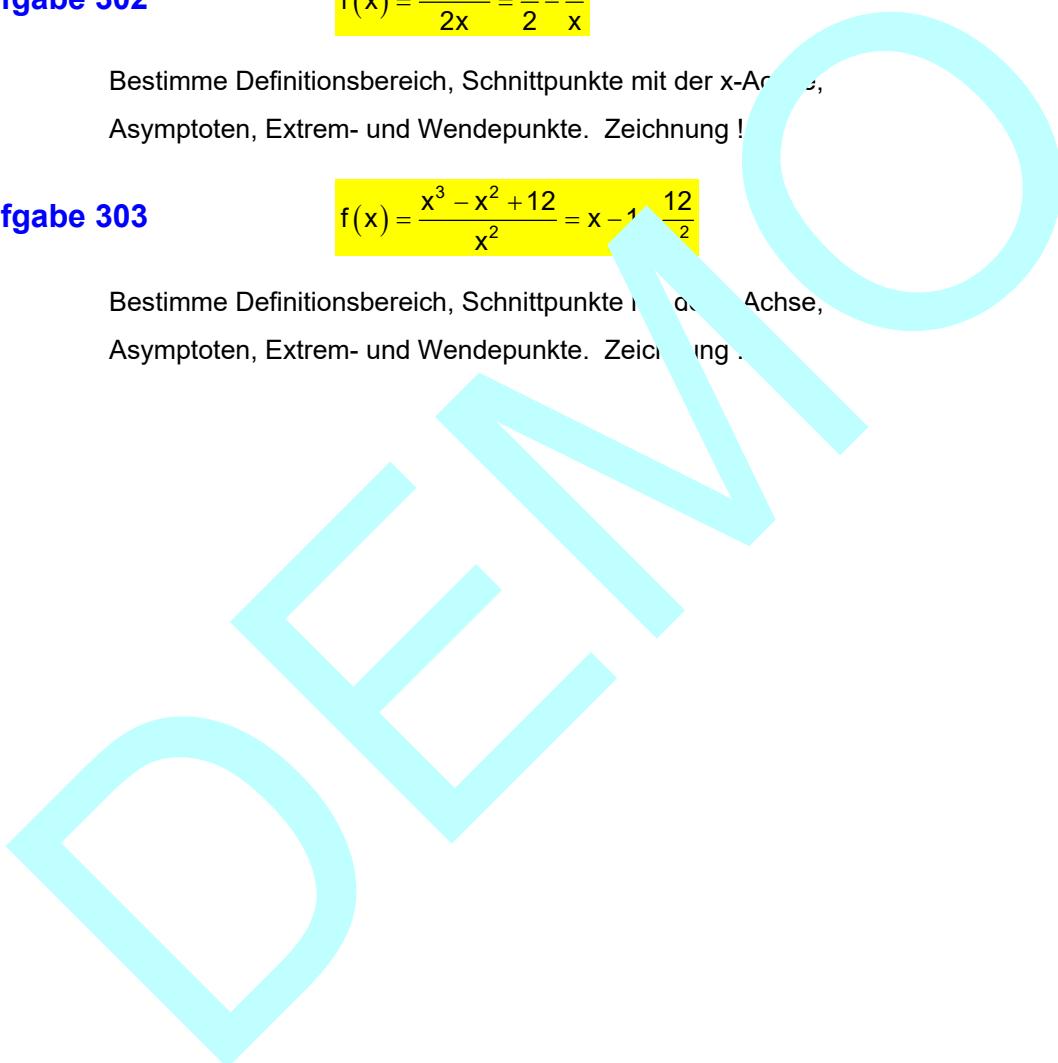
$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 303**

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 12}{x^2} = x - 1 + \frac{12}{x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung .



**Aufgabe 311**

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$$

- a) Berechne Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.
- b)  $P(u | f(u))$  sei ein beliebiger Kurvenpunkt des Schaubilds K von f.  
Für welchen Wert von  $u$  geht die Tangente in P durch den Ursprung?  
In welchem Punkt S schneidet die Tangente in P die Kurve K nochmals?
- c) Die Parallele zur y-Achse durch  $P(u | f(u))$  jetzt mit  $u > 1$  schneidet die schiefe Asymptote in Q.  
Ferner sei R (1 | 0) gegeben. Berechne den Inhalt des Dreiecks PQR.  
Für welchen Wert von  $u$  nimmt das Dreieck einen extremen Inhalt an?  
Bestimme dessen Art und Größe.

**Aufgabe 312**

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{4x^2}$$

- a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem und Wendepunkte. Zeichne K für  $-7 \leq x \leq 7$
- b) Die Gerade  $x = u$  mit  $u < 0$  schneidet das Schaubild K von f in P und die schiefe Asymptote in Q. Untersuche den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ.
- c) An welcher Stelle  $x > 0$  ist  $f(x) = 3$ ? Bestimme  $x$  mit einem Näherungsverfahren.
- d)  $P(u | v)$  sei ein Kurvenpunkt mit  $u > 0$ .  
Die Tangente in P schneidet die beiden Asymptoten in R und T.  
Berechne den Inhalt des Dreiecks RTV.
- e) Welche Parallelen zur x-Achse haben mit der Kurve K wie viele Punkte gemeinsam?

**Aufgabe 313**

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x - 8}{2x^2}$$

- a) Bestimme Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte.  
Zeichne das Schaubild für  $-6 \leq x \leq 6$  (y-Achse -8 bis 8)
- b) Berechne die x-Koordinaten der Punkte B<sub>1</sub> und B<sub>2</sub>, in denen die Tangente die Eigenschaft hat, die y-Achse in Z(0 | 1) zu schneiden.
- c) Welche Parallelen zur 1. Binckhalbierenden schneiden / berühren die das Schaubild K von f?

**Aufgabe 314**

$$f(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 16}{2x^2}$$

- a) Bestimme Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K für  $-6 \leq x \leq 6$ .
- b) Berechne die Kurven Punkte B, in denen die Tangente die y-Achse in Z(0 | 5) schneidet.
- c) Zeige, dass das Schaubild schrägsymmetrisch zur y-Achse ist.
- d) Die Gerade  $x = r$  ( $r > 2$ ) schneidet K in P und die schiefe Asymptote in Q. Diese Gerade begrenzt zusammen mit der schiefen Asymptote, der Kurve K und der x-Achse eine Fläche mit den Eckpunkten PQN<sub>1</sub>N<sub>2</sub>. Berechne den Inhalt A(r) sowie deren Grenzwert für  $r \rightarrow \infty$ .  
In welchem Verhältnis teilt die Gerade  $x = 2$  die Gesamtfläche?

### Typ 3 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 1

#### (b) Nenner mit Summe

**Aufgabe 321**

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 322**

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 331**

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{(x+1)^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

**Aufgabe 335**

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

DE

**Aufgabe 341**

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$$

- a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K.
- b) Zeige, dass das Schaubild K zum Schnittpunkt der Asymptoten symmetrisch ist.
- c) Berechne den Schnittpunkt von K mit der Kurve  $y = \frac{5}{x}$  mit dem Newtonschen Näherungsverfahren.
- d) Die Gerade mit der Gleichung  $x = u$  mit  $u > -2$  schneidet K in P und die schräge Asymptote in Q. R sei der Schnittpunkt der Asymptoten. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von u. Interpretiere das Ergebnis.

**Aufgabe 342**

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$$

(Abitur 2002, BW)

- a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichne K samt Asymptoten für  $-6 \leq x \leq 6$  und  $0 \leq y \leq 1$  cm.
- b) Das Schaubild K, die Geraden  $x = 2$ ,  $x = 1$  mit  $x < 1$  und  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  begrenzen ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt  $A(v)$ . Untersuche das Verhalten von  $A(v)$  für  $v \rightarrow \infty$ .
- c) Die Tangente an K an einem Knickepunkt P(a | f(a)) mit  $a > 1$  schneidet die y-Achse in  $S(0 | \frac{3}{2})$ . Beweise, dass dies nur für  $a \in ]4; 5[$  mindestens einmal passiert.
- d) Gegeben ist die Integralfunktion H der Funktion  $H(x) = \int_0^x \frac{f(-t) + f(t)}{t^2 + 1} dt$  für  $-1 < x < 1$ . Beweise, dass H monoton ist. Untersuche, ob sogar strenge Monotonie vorliegt.

**Aufgabe 343**

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$$

- a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K im Bereich  $-4 \leq x \leq 5$  mit Längeneinheit 1 cm.
- b)  $P(u | f(u))$  liegt auf der Kurve K mit  $u > 1$ . Die Parallele zur senkrechten Asymptote durch P schneidet die schräge Asymptote in R. Die Parallele zur schrägen Asymptote durch P schneidet die senkrechte Asymptote in Q. Der Asymptotenschnittpunkt ist S. Berechne den Inhalt des Parallelogramms PQRS. Deute das Ergebnis.
- c) Zeige, dass das Schaubild K punktsymmetrisch zum Punkt  $S(-1, 0)$  ist.
- d) K begrenzt mit den Koordinatenachsen im 2. Feld ein Flächenstück. Berechne seinen Inhalt.

**Zusatzaufgabe für CAS-Rechner:**

- e) Die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt  $B(u_0 | f(u_0))$  mit  $u > 1$  schneidet die Asymptoten in C und D. S sei deren Schnittpunkt.

Für welche Lage des Punktes B nimmt der Inhalt des Dreiecks SCD einen extremen Inhalt an?

Berechne seine Größe.

## Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2

### (a) Nenner ohne Summe

#### Aufgabe 411

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

#### Aufgabe 412

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2}{2x}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

#### Aufgabe 421

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

#### Aufgabe 422

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse,  
Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

## Typ 4 Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 2

### (b) Nenner mit Summe

#### Aufgabe 431

$$f(x) = \frac{x^3}{8x+16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{x+2}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

#### Aufgabe 432

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{2(x^2 + 8)} = \frac{1}{2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + 4}$$

Bestimme Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung !

#### Aufgabe 441

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{3(x-1)}$$

(Abitur 1993 – Bremen)

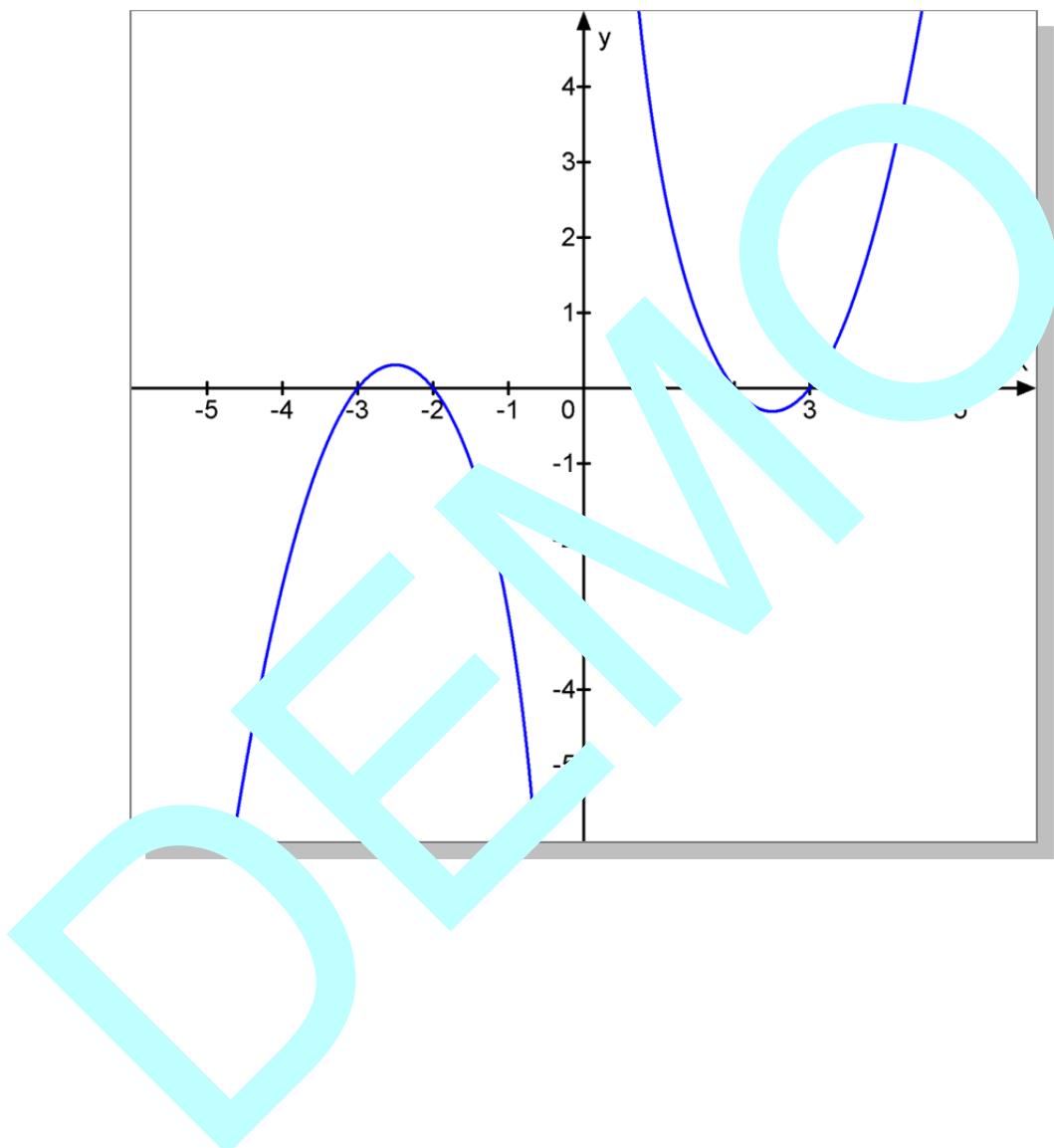
- a) Bestimme die gemeinsamen Punkte von K mit der x-Achse und ihrer Steigung. Welche Asymptoten hat K? Bestimme die Näherungskurve für  $|x| \rightarrow \infty$ . Zeichne K mit den Asymptoten und Näherungskurve für  $-4 \leq x \leq 4$  und  $-4 \leq y \leq 13$  mit Längeneinheit 1 cm.
- b) K besitzt genau einen Wendepunkt. Beweise, dass dieser im Intervall  $U = [-1; 0]$  liegt. Berechne seine x-Koordinate mit der Newtonschen Näherungsverfahren auf 2 Dezimalen genau.
- c) Im 3. Feld begrenzen K und die x-Achse ein Rechteckstück. Berechne dessen Inhalt A.

## Typ 5      Funktionen mit Grad Zähler = Grad Nenner + 3

## Aufgabe 511

$$f(x) = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x}$$

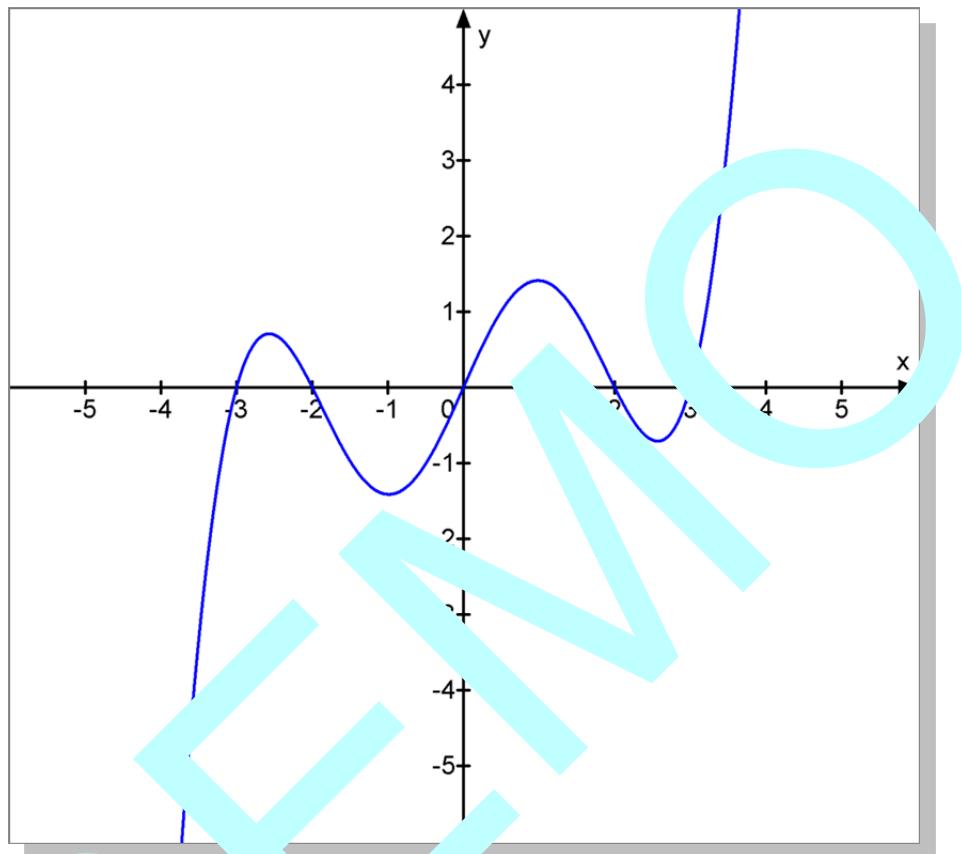
## Noch ohne Lösung



**Aufgabe 512**

$$f(x) = \frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^2 + 16}$$

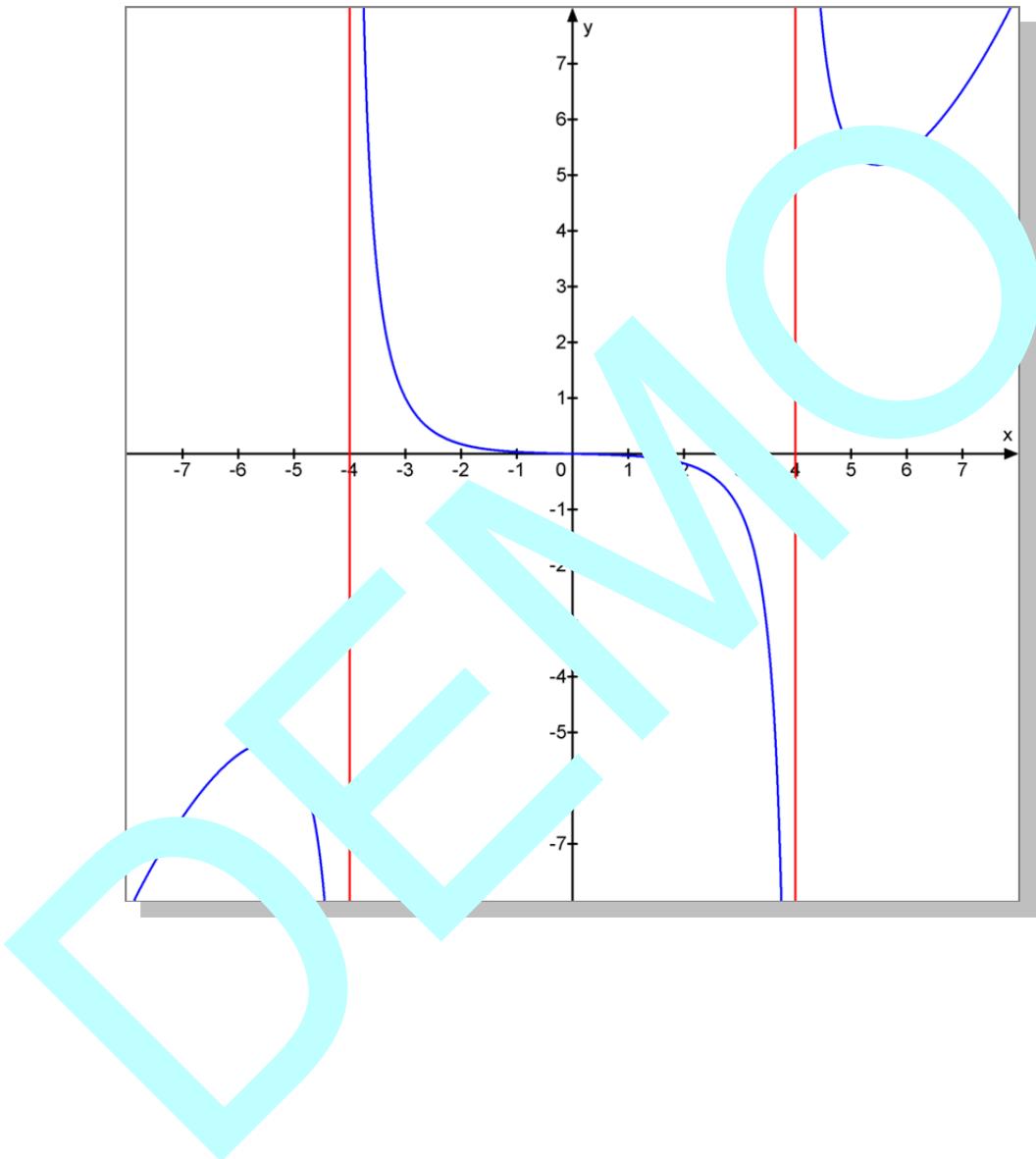
Noch ohne Lösung



**Aufgabe 513**

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot \frac{x^5 + 13x^3 + 36x}{x^2 - 16}$$

Noch ohne Lösung



## Typ 6 Betragsfunktionen

### Aufgabe 611

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - 3 \frac{|x|}{x^2 - 4}$$

- a) Stelle  $f$  ohne Verwendung der Betragsstriche dar. Gib den maximalen Definitionsbereich an.  
 Bestimme die Asymptoten des Schaubilds  $K$  von  $f$ .  
 Untersuche  $K$  für  $x \neq 0$  auf Punkte mit waagrechter Tangente. (Es genügt, die Koordinaten auf zwei Dezimalen zu runden).
- b) Untersuche  $f$  auf Differenzierbarkeit an der Stelle  $x = 0$ .  
 Zeige, dass  $f$  bei  $x = 0$  ein relatives Minimum hat.  
 Zeichne  $K$  und die Asymptoten für  $-7 \leq x \leq 7$  (Längeneinheit 1cm).
- c) Zeige, dass  $K$  im Intervall  $[2,1; 3]$  genau einen Punkt  $Q$  der  $x$ -Achse gemeinsam hat.  
 Berechne einen Näherungswert für die Abszisse  $x = Q$  mit Hilfe des Newtonschen Iterationsverfahrens auf 3 Dezimalen genau.
- d)  $K$  wird im Bereich  $4 \leq x \leq 7$  an der Geraden  $y = 3$  gespiegelt.  
 Das Spiegelbild sei  $K^*$ . Bestimme die Gleichung für  $K^*$ .  
 Die Schaubilder  $K$ ,  $H^*$  und die Geraden  $y = 3$  umschließen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.

Lösungen  
Lösungen

DEMO

**Lösung 101**

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

Grundeigenschaften:

Da der Zähler konstant ist, hat die Funktion keine Nullstellen.

Der Nenner wird 0 für  $x = 0$ , also ist  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die Funktion hat bei  $x = 0$  einen Pol.

Für  $x \rightarrow 0+$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$  und für  $x \rightarrow 0-$   $\Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ .

( $x \rightarrow 0+$  heißt "von rechts", also für  $x > 0$  annähern.)

Das Schaubild  $K$  von  $f$  hat also die senkrechte Asymptote  $x = 0$ .

Wegen  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = -2 \cdot \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  ist die  $x$ -Achse waagrechte Asymptote.

Ableitungen:

$$f(x) = -2x^{-1}$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

$$f''(x) = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$$

Auswertung:

Da  $f'(x)$  nie Null wird, besitzt  $K$  keine Extremwerte.

Da  $f''(x)$  nie Null wird, besitzt  $K$  keine Wendepunkte.

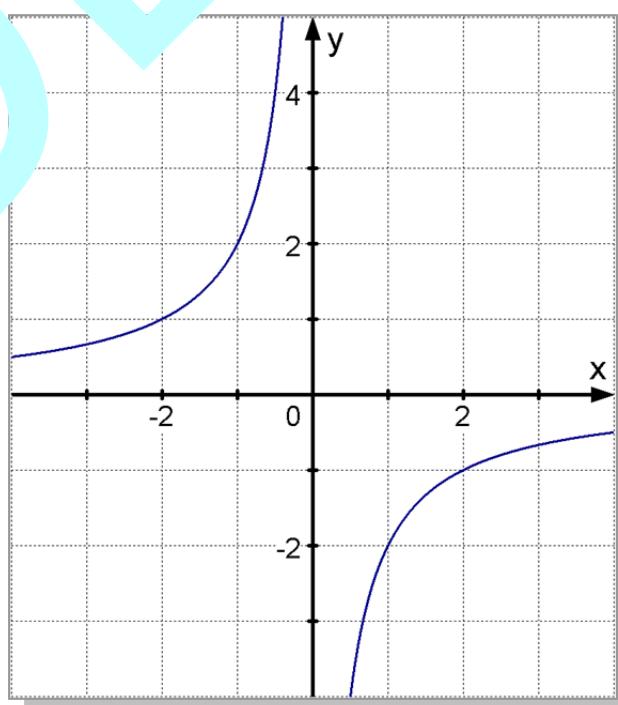
Monotonie:

Im Intervall  $]-\infty; 0[$  ist  $f$  stetig und es gilt  $f'(x) > 0$ , d.h.

$f$  wächst dort streng monoton von  $0$  gegen  $\infty$ . Im Intervall  $]0; \infty[$  ist  $f$

stetig und es gilt  $f''(x) > 0$ , d.h.  $f$  wächst dort streng monoton

$-\infty$  gegen  $0$ . Die Wertemenge ist daher  $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .



**Lösung 102**

$$f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2}$$

Grundeigenschaften:Nullstelle des Zählers:  $x = -2$ Nullstelle des Nenners:  $x = 0$ , doppelte LösungDefinitionsbereich:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Folgerung: $f$  hat die Nullstelle  $-2$  und die Polstelle  $0$  ohne Zeichenwechsel.Das Schaubild schneidet also die  $x$ -Achse im Punkt  $N(-2 | 0)$  und hat die Asymptoten  $x = 0$  (senkrecht) und  $y = 0$  (waagerecht),denn es ist  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} 8 \frac{x+2}{x^2} = 8 \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 8 \cdot 0 = 0$ 

Ableitungen:  $f(x) = 8 \frac{x+2}{x^2} = 8 \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 8(x^{-1} + 2x^{-2})$

$f'(x) = 8(-x^{-2} - 4x^{-3}) = 8 \left( -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) = -8 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = -8 \left( \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$

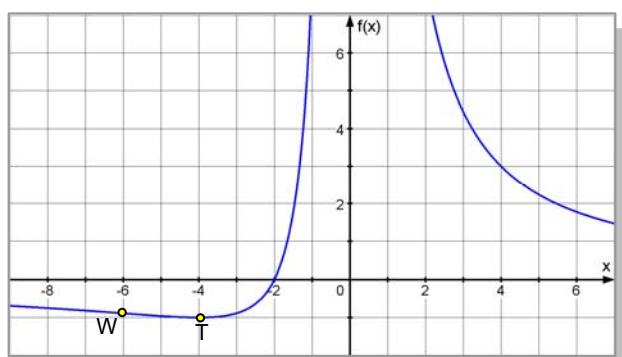
$f''(x) = 8(2x^{-3} + 12x^{-4}) = 16 \left( \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right) = 16 \left( \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} \right)$

Extrempunkte: Bed.:  $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = -4$ .Kontrolle:  $f''(0) = 16 \frac{2}{(-4)^2} = 8 > 0$ , d.h.  $f$  hat bei  $0$  ein lokales Minimum mit

$f(-4) = 8 \frac{-4+2}{(-4)^2} = -1$

Ergebnis:  $K$  hat den Tiefpunkt  $T(-4 | -1)$ .Wendepunkte:  $f''(x_w) = 0 \Leftrightarrow x_w = -6$ Kontrolle: Da  $f''$  in  $x = -6$  eine einfache Nullstelle besitzt, liegt Zeichenwechsel vor, d.h.  $K$  hat dort Krümmungswechsel.

y-Wert:  $f(-6) = 8 \frac{-6+2}{(-6)^2} = 8 \frac{-4}{36} = -\frac{8}{9} \approx 0,89$

Ergebnis:  $W(-6 | 0,89)$ Wertmenge:  $V = [-1; \infty[$ 

**Lösung 103**

$$f(x) = \frac{2-2x}{x^2}$$

DEMO